

Support de cours – Variétés différentielles

Philippe Bouafia

10 novembre 2024

Table des matières

1 Variétés différentielles	1
1.1 Définition générale	1
1.2 Partitions de l'unité	4
1.3 Espace tangent, application tangente	4
1.4 Immersions et submersions	10
1.5 Sous-variétés	11
1.6 Champs de vecteurs	12
2 Intégration des formes différentielles	16
2.1 Tenseurs et champs tensoriels	16
2.2 Tenseurs alternés et formes différentielles	20
2.3 Dérivée extérieure d'une forme différentielle	23
2.4 Orientations	28
2.5 Formule de Stokes	30

1 Variétés différentielles

1.1 Définition générale

1.1 (Conventions d'Einstein). — Dans ce cours, nous utiliserons les conventions d'Einstein, que nous expliquons ici informellement. Lorsqu'une famille de vecteurs est indexée, on place les indices en bas. Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $E_1, \dots, E_n$. En revanche, les coordonnées d'un vecteur sont notées en haut. On écrira donc $x = \sum_{i=1}^n x^i E_i$. Lorsqu'un même indice apparaît à la fois en haut et en bas, les conventions de sommation d'Einstein rendent la sommation implicite. On écrira donc plus simplement $x = x^i E_i$.

Pour des formes linéaires, qui sont des objets d'un autre type que les vecteurs, les conventions sont inversées. La base duale de $\mathbb{R}^n$ sera notée $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$, avec

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et les coordonnées d'une forme linéaire sont notées en bas $\varphi = \varphi_i \varepsilon^i$. De sorte, tout est cohérent, puisque $x^i = \varepsilon^i(x)$.

Par ailleurs, quand on rencontre une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x^i}$, il faut compter l'indice i comme étant « en bas ».

Pour le moment, il faut suspendre sa crédibilité et admettre que les conventions d'Einstein sont un moyen formidable de détecter des expressions qui n'ont pas de sens intrinsèque sur une variété différentielle. Par exemple, le gradient d'une fonction f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} E_i$$

viole les conventions d'Einstein. On peut en revanche définir la différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} \varepsilon^i$$

(on note aussi $\varepsilon^i = dx^i$). Si l'on veut donner un sens au gradient, il faut une structure additionnelle, pour respecter les conventions d'Einstein, on écrit

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} E_j \quad (1)$$

avec $g^{ij} = 1$ ou 0 selon que $i = j$ ou non. Les g^{ij} sont les coordonnées d'un 2-tenseur particulier, le tenseur métrique (qui a un sens sur les variétés riemanniennes). L'expression de g^{ij} que l'on a donnée n'est en vérité valable que pour certains systèmes de coordonnées (par exemple les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^n$), et justement, les tenseurs sont régis par des formules de changement de variable qui rendent (1) valable quel que soit le système de coordonnées.

1.2 (Variété topologique). — On appelle *variété topologique de dimension n* un espace topologique M séparé à base dénombrable qui est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. De manière équivalente, on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On écrit $\dim M = n$.

Les conditions topologiques « séparé » et « à base dénombrable » sont essentiellement techniques et servent à éliminer des cas pathologiques. Nous reviendrons en détail sur ces conditions (et sur leurs conséquences) dans le premier DM. On rappelle qu'un espace topologique M est dit à base dénombrable lorsqu'il existe une collection dénombrable d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que tout ouvert de M s'écrit comme union $\bigcup_{i \in J} U_i$ avec $J \subseteq I$. On fait remarquer cependant que ces deux propriétés sont stables par passage au sous-espace, et qu'elles sont vérifiées pour $\mathbb{R}^n$. Il est bon de savoir que, chez les espaces métriques, être à base dénombrable et être séparable sont des conditions équivalentes. S'il on veut pouvoir plonger une variété topologique dans un espace $\mathbb{R}^n$, il faut donc imposer ces conditions topologiques a priori, car elles ne sont pas automatiques, comme le montrent les contre-exemples :

- la droite avec origine dédoublée, voir [1, Problem 1.1] (qui n'est pas séparée).
- M un ensemble indénombrable, muni de la topologie discrète (qui n'est pas à base dénombrable).

On appelle *système de coordonnées* un couple (U, φ) , où U est un ouvert de M et $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ est un homéomorphisme de U vers $\varphi(U)$. On dit aussi que (U, φ) est une carte locale. Les fonctions coordonnées de $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. C'est un point de vue assez nouveau et fécond, les coordonnées sont maintenant des fonctions, dépendant d'un point abstrait p d'une variété. Il faut interpréter la fonction réciproque $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ comme une paramétrisation euclidienne d'un petit bout de M .

L'étude des variétés topologiques n'est pas l'objet de ce cours. Afin de pouvoir introduire les outils de calcul différentiel sur une variété, il faut introduire une structure additionnelle.

1.3 (Variété différentielle). — Une *structure différentielle* sur une variété topologique est une collection $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ de systèmes de coordonnées tels que

- (A) les domaines U_α ($\alpha \in A$) des cartes recouvrent la variété M ;

(B) Pour tous $\alpha, \beta \in A$, l'application (dite de changement de cartes)

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est un C^∞ -difféomorphisme.

(C) Si (U, φ) est une carte compatible avec toutes les cartes de $\mathcal{A}$, au sens où $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme pour tout $\alpha \in A$, alors $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Une collection vérifiant (A) et (B) est poétiquement appelée *atlas*. Lorsque (C) est vérifiée, on parle d'atlas *maximal*. Tout atlas détermine unique atlas maximal, il suffit de lui rajouter toutes les cartes qui lui sont compatibles. On appelle variété différentielle la donnée $(M, \mathcal{A})$ d'une variété topologique M et d'une structure différentielle.

1.4 (Exemples). — (A) Structure différentielle standard de $\mathbb{R}^n$: on choisit l'atlas maximal contenant la carte $(\mathbb{R}^n, \text{id})$. Plus généralement, si E est un espace vectoriel de dimension n , la structure différentielle standard est l'atlas maximal contenant les (E, φ) , où $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire.

(B) Si $(M, \mathcal{A})$ est une variété différentielle et U un ouvert de M , on peut munir U de la structure différentielle composée des cartes $(U \cap U_\alpha : \varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha})$, où $\alpha \in A$.

(C) Par les deux points précédents, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est une variété différentielle.

(D) La sphère

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\}$$

peut être munie d'une structure de variété différentielle, voir [1, Exemple 1.31] et [1, Problem 1.7]. Comme la sphère est compacte, elle n'est homéomorphe à aucun ouvert de $\mathbb{R}^n$. Il faut donc ici au mieux deux cartes pour recouvrir $\mathbb{S}^n$.

(E) L'espace projectif, voir [1, Exemple 1.33].

(F) Variétés produits : si M et N sont des variétés, munis d'atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ et $\{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B\}$, on donne à $M \times N$ l'atlas maximal contenant les cartes $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$, où (α, β) parcourt $A \times B$. Ici $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ désigne l'application $(p, q) \mapsto (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$.

1.5 (Applications lisses). — Soient $F : M \rightarrow N$ une application continue entre deux variétés M et N . On dit que F est lisse (ou C^∞) lorsque, pour toutes cartes (U, φ) et (V, ψ) au départ et à l'arrivée, l'application

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

est de classe C^∞ . On appelle parfois $\hat{F}$ l'application « F lue dans les cartes ». Les variétés différentielles et les applications lisses sont un exemple de catégorie.

1.6 (Langage catégorique). — Une *catégorie* $\mathbf{C}$ consiste en la donnée

- (A) d'une classe d'objets $\text{ob}(\mathbf{C})$;
- (B) pour tous objets $X, Y \in \text{ob}(\mathbf{C})$, d'un ensemble $\text{Hom}(X, Y)$, dont les éléments sont appelés *morphismes* (ou *flèches*) de X vers Y ;
- (C) pour tous objets $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathbf{C})$, d'une opération de composition

$$\circ : \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z) : (g, f) \mapsto f \circ g$$

vérifiant les axiomes suivants

- (A) Associativité : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ pour toutes flèches f, g, h aux domaines compatibles.
- (B) Existence de l'identité : pour tout objet X , il existe une flèche (nécessairement unique) id_X telle que $\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X$ pour toute flèche $f : X \rightarrow Y$.

Pour être entièrement précis, il faudrait rajouter un axiome 0 : pour tous couples d'objets $(X, Y) \neq (X', Y')$, les ensembles de morphismes $\text{Hom}(X, Y)$ et $\text{Hom}(X', Y')$ sont disjoints. Autrement dit, chaque morphisme a un domaine de départ et d'arrivée bien déterminé.

Vérifier que les axiomes de catégorie sont bien vérifiées pour Diff , la catégorie des variétés différentielles avec applications lisses (essentiellement, il reste à vérifier que la composée d'applications lisses est lisse). Un exercice possible : vérifier que les applications projection $\pi_1: M \times N \rightarrow M$ et $\pi_2: M \times N \rightarrow N$ sont lisses ; consulter la définition d'objet produit dans une catégorie ; et vérifier que la donnée de $M \times N$ et des morphismes π_1 et π_2 définissent bien le produit au sens catégorique de M et N . Étudier la notion duale de coproduit et montrer que les coproduits dénombrables existent dans Diff .

Dans une catégorie donnée, on appelle *isomorphisme* une flèche $f: X \rightarrow Y$ qui est inversible, c'est-à-dire pour laquelle il existe un inverse (nécessairement unique) $f^{-1}: Y \rightarrow X$ tel que $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ et $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$. Une fois qu'on a défini une catégorie, on peut se poser la question, en général très difficile, de la classification de ses objets à isomorphisme près.

Les isomorphismes de Diff s'appellent bien entendu *difféomorphismes*. Voici un exemple de résultat de classification : les seules variétés connexes de dimension 1 sont la droite réelle et le cercle, à difféomorphisme près.

1.2 Partitions de l'unité

1.7. — Les résultats de cette partie sont démontrés dans le premier DM. Les partitions de l'unité sont un outil de base pour « passer du local au global ». Voici la définition. Soit $\{U_i : i \in I\}$ un recouvrement ouvert d'une variété M . On appelle *partition de l'unité subordonnée* au recouvrement $\{U_i : i \in I\}$ une collection $\{\varphi_i : i \in I\}$ de fonctions C^∞ sur M vérifiant

- (A) $0 \leq \varphi_i \leq 1$ pour tout $i \in I$;
- (B) $\text{supp } \varphi_i \subseteq U_i$ pour tout $i \in I$;
- (C) la famille $(\text{supp } \varphi_i)_{i \in I}$ est localement finie : tout point de M admet un voisinage qui n'intersecte qu'un nombre fini des $\text{supp } \varphi_i$;
- (D) $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ pour tout $p \in M$.

Le résultat principal de cette section est l'existence de partitions de l'unité. C'est un résultat de topologie,

1.8 THÉORÈME. — *Tout recouvrement ouvert d'une variété admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée.*

Comme application importante, nous en déduisons l'existence de fonctions dites « bump », dont le support est localisée dans une région d'intérêt de la variété.

1.9 COROLLAIRE. — *Soient M une variété, A un fermé de M et U un ouvert de M contenant A . Il existe une application lisse $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 1 sur A et à support contenu dans U .*

Une conséquence très importante de ce corollaire, que nous utiliserons souvent implicitement dans la suite, est que toute fonction C^∞ définie au voisinage de p coïncide sur un voisinage (peut-être plus petit) de p avec une fonction C^∞ définie sur toute la variété.

1.3 Espace tangent, application tangente

1.10. — Il existe trois échelles différentes à laquelle on peut considérer une variété : l'échelle globale, au niveau de toute la variété, l'échelle locale, au niveau des cartes, et enfin l'échelle infinitésimale, au niveau de l'espace tangent en un point, que nous allons définir dans cette section.

La définition de vecteur tangent est assez délicate, dans la mesure où les variétés qui nous manipulons ne sont pas plongées dans un espace vectoriel ambiant. Il existe plusieurs constructions équivalentes de l'espace tangent en un point p d'une variété M . Celle que nous présentons est assez abstraite, mais permet une définition claire qui ne fasse appel aux cartes locales. L'interprétation est la suivante : un vecteur, c'est une direction dans laquelle on peut dériver les fonctions définies sur la variété, et qui ont donc un sens intrinsèque. Cela revient à identifier vecteurs et opérateurs de dérivation, ce qui est à la base de la définition suivante.

On appelle *dérivation en p* , ou *vecteur tangent en p* une application linéaire $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \text{ pour tous } f, g \in C^\infty(M).$$

L'espace des vecteurs tangents en p est appelé *espace tangent en p* ; il est noté T_pM . Voyons quelques propriétés des dérivations en p :

(A) Les fonctions constantes sont envoyées sur 0. C'est parce que

$$v(1) = v(1 \times 1) = v(1) + v(1)$$

et donc $v(1) = 0$ puis par linéarité $v(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(B) L'espace tangent T_pM est clairement un espace vectoriel. C'est la force de cette définition par rapport à d'autres. Par contre, il n'est pas encore évident que T_pM soit de dimension finie (de même dimension que M).

(C) Si $f, g \in C^\infty(M)$ sont nulles en p , alors le produit fg est nul à l'ordre 2 en p et est envoyé sur 0. En effet,

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) = 0.$$

(D) Les dérivations sont locales au sens où $v(f) = v(g)$ si $f = g$ sur un voisinage de p . Il s'agit de montrer que $v(h) = 0$, où $h = f - g$ est nul sur un voisinage U de p . Le corollaire 1.9 permet d'obtenir une fonction bump $\chi: M \rightarrow \mathbb{R}$, valant 1 sur un voisinage de p , à support dans U . La fonction χh est alors identiquement nulle, ce qui implique

$$0 = v(\chi h) = \chi(p)v(h) + h(p)v(\chi) = v(h)$$

et termine donc la preuve de notre affirmation.

Le point (D) nous amène à introduire la notion de germe en p d'une fonction de $C^\infty(M)$. On introduit la relation d'équivalence

$$f \sim g \iff f = g \text{ sur un voisinage de } p.$$

Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées les *germes de fonctions en p* . Comme la relation $\sim$ est compatible avec les opérations algébriques, l'ensemble $C_p^\infty(M)$ des germes en p est une $\mathbb{R}$ -algèbre. Du fait du point (D), on n'hésitera pas à écrire $v(f)$ dans le cas où f est une fonction C^∞ définie au voisinage de p , voire lorsque f est le germe d'une fonction en p , avec le sens évident que peut avoir $v(f)$.

On note $\mathfrak{J}_p$ l'idéal de $C_p^\infty(M)$ des germes de fonctions nulles en p . La proposition suivante donne une construction alternative de l'espace tangent. Au passage, l'espace vectoriel $\mathfrak{J}_p/\mathfrak{J}_p^2$, qui semble être un objet plus fondamental, est appelé (naturellement isomorphe à) l'espace *cotangent*.

1.11 PROPOSITION. — *L'espace tangent T_pM est isomorphe à $(\mathfrak{J}_p/\mathfrak{J}_p^2)^*$.*

Démonstration. Prenons une dérivation v . Le point (D) dit qu'on peut factoriser v de la manière suivante.

$$C^\infty(M) \xrightarrow{\text{projection}} C_p^\infty(M) \xrightarrow{\tilde{v}} \mathbb{R}$$

On restreint maintenant $\tilde{v}$ à $\mathfrak{J}_p$. Par le point (C), $\tilde{v}$ est nulle sur $\mathfrak{J}_p^2$. En passant au quotient, cela définit une application

$$\ell: (\mathfrak{J}_p/\mathfrak{J}_p^2)^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'application $v \mapsto \ell$ de $T_p M \rightarrow (\mathfrak{J}_p/\mathfrak{J}_p^2)^*$ que nous venons de définir est bien sûr linéaire. Montrons qu'elle admet un inverse. Si ℓ est donné, on construit

$$v: f \mapsto \ell([f - f(p)])$$

où $[f - f(p)]$ désigne l'élément de $\mathfrak{J}_p/\mathfrak{J}_p^2$ obtenu à partir de $f - f(p)$. Le seul point délicat à vérifier est que v vérifie la règle de Leibniz. Pour $f, g \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned} v(fg) &= \ell([fg - f(p)g(p)]) \\ &= \ell([(f - f(p))(g - g(p)) + f(p)(g - g(p)) + g(p)(f - f(p))]) \\ &= f(p)\ell([g - g(p)]) + g(p)\ell([f - f(p)]) \\ &= f(p)v(g) + g(p)v(f). \end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les applications $v \mapsto \ell$ et $\ell \mapsto v$ sont réciproques. $\square$

1.12. — Soit $(U, (x^1, \dots, x^n))$ une carte locale autour d'un point p . Elle permet de définir les vecteurs

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \in T_p M$$

par la formule

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \text{ pour } f \in C^\infty(M)$$

On va montrer que ces éléments forment une base de $T_p M$.

1.13 PROPOSITION. — Soit $(U, (x^1, \dots, x^n))$ une carte autour d'un point $p \in M$. Alors

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \in T_p M$$

est une base de $T_p M$ et pour tout $v \in T_p M$,

$$v(f) = v(x^i) \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p$$

En particulier, $\dim T_p M = n$.

Démonstration. Tout d'abord, le fait que

$$\left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_p = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

implique que la famille en question est libre.

On va utiliser la formule de Taylor avec reste intégral

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t) dt$$

valable pour une fonction g de classe C^2 sur $[0, 1]$.

Quitte à restreindre U , on va supposer $\varphi(U)$ convexe. On prend $f \in C^\infty(M)$ et $q \in U$. On applique la formule de Taylor à $t \mapsto f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(\varphi(q) - \varphi(p)))$.

$$\begin{aligned} f(q) &= f(p) + (x^i(q) - x^i(p)) \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \\ &\quad + (x^i(q) - x^i(p))(x^j(q) - x^j(p)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j}(\varphi(p) + t(\varphi(q) - \varphi(p))) dt \end{aligned}$$

Par les théorèmes standard, le reste intégral est une fonction C^∞ de q . En appliquant une dérivation $v \in T_p M$, et en prenant en compte les points (A) et (C) de 1.10, on obtient

$$v(f) = v(x^i) \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \quad \square$$

1.14 (Changement de variables). — Si $(V, (y^1, \dots, y^n))$ est une deuxième carte autour de p , alors

$$\left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

1.15 (Application tangente). — Soit $F: M \rightarrow N$ une application lisse et $p \in M$. On définit l'application tangente en p

$$TF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

par $TF_p(v)(f) = v(f \circ F)$. Il faut vérifier que $TF_p(v)$ est une dérivation en $F(p)$. La linéarité est claire, et la règle de Leibniz est assurée par le calcul suivant.

$$\begin{aligned} TF_p(v)(fg) &= v((fg) \circ F) \\ &= v((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= f \circ F(p)v(g \circ F) + g \circ F(p)v(f \circ F) \\ &= f(F(p))TF_p(v)(g) + g(F(p))TF_p(v)(f) \end{aligned}$$

1.16 PROPOSITION. — Soient $F: M \rightarrow N$ et $G: N \rightarrow P$ des applications lisses et $p \in M$. On a

(A) $TF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ est linéaire.

(B) $T(G \circ F)_p = TG_{F(p)} \circ TF_p$.

(C) $T(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}$.

(D) Si F est un difféomorphisme, alors TF_p est un isomorphisme et $(TF_p)^{-1} = T(F^{-1})_{F(p)}$.

(E) Si M est connexe et $TF_p = 0$ en tout point p , alors F est constante.

1.17 (Vecteur vitesse). — Si $\gamma: I \rightarrow M$ est une courbe paramétrée C^∞ , définie sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$, on définit pour $t \in I$,

$$\gamma'(t) = T\gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \in T_{\gamma(t)} M$$

1.18 (Espace cotangent). — On appelle *espace cotangent* à p le dual de T_p^*M de T_pM . Voici par exemple des éléments de l'espace cotangent. Si f est une fonction C^∞ définie au voisinage de p , on appelle *différentielle de f au point p* la forme linéaire $df|_p \in T_p^*M$ définie par

$$df|_p(v) = v(f).$$

La proposition 1.13 ne fait qu'exprimer que, pour une carte locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$, les différentielles $dx|_p^1, \dots, dx|_p^n$ forment la base duale de $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$. De plus, on récupère une formule bien connue de calcul différentielle

$$df|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p dx|_p^i$$

L'application adjointe de l'application tangente en p de $F: M \rightarrow N$ est notée

$$F^*: T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M: \omega \mapsto \omega \circ TF_p$$

On vérifie en particulier que

$$(A) \quad F^* df|_{F(p)} = d(f \circ F)|_p;$$

$$(B) \quad d(fg)|_p = f(p) dg|_p + g(p) df|_p.$$

Le point (A) découle du calcul suivant

$$\begin{aligned} F^* df|_{F(p)}(v) &= (df|_{F(p)} \circ TF_p)(v) \\ &= df|_{F(p)}(TF_p(v)) \\ &= TF_p(v)(f) \\ &= v(f \circ F) \\ &= d(f \circ F)|_p(v) \end{aligned}$$

valable pour tout $v \in T_pM$, tandis que le point (B) est une conséquence de la règle de Leibniz pour les dérivations.

Il est très important ici de remarquer que la différentielle d'une fonction en p est le bon objet pour mesurer les variations locales de f . Surtout, il n'existe pas de notion bien définie de gradient sur une variété différentielle, qui ressemblerait à

$$\nabla f_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

On voit d'une part qu'une telle définition violerait les conventions d'Einstein, mais surtout qu'elle n'est pas invariante par changement de cartes. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \neq \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_p \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p + \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_p \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p$$

1.19 (Fibrés tangents). — Ensemblistement, le fibré tangent de M est l'union disjointe

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM$$

Il faut s'entendre sur ce que signifie l'union disjointe ici. Les ensembles T_pM ne sont pas disjoints (ils contiennent tous par exemple la dérivation nulle). On construit l'union disjointe comme

$$\coprod_{p \in M} T_pM = \{(p, v) : p \in M \text{ et } v \in T_pM\}.$$

D'une certaine manière, on force chaque vecteur tangent à avoir une origine. On notera un point de TM sous la forme (p, v) ou $v|_p$. On appelle $\pi: TM \rightarrow M$ l'application qui envoie un vecteur sur son point de base.

On va munir TM d'une structure différentielle, de dimension $2n$. Notons $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ l'atlas maximal de M . Pour tout $\alpha \in A$, on définit $\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ et $\tilde{\varphi}_\alpha: \tilde{U}_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ l'application

$$\tilde{\varphi}_\alpha: (p, v) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v(x^1), \dots, v(x^n)).$$

Autrement, on concatène les coordonnées de p avec celles de v dans la base $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$. Ici, on est dans une situation où l'on souhaite donner TM une structure de variété différentielle, alors qu'a priori, aucune topologie n'est donnée. On utilisera le lemme 1.20 plus bas.

À toute application lisse $F: M \rightarrow N$, on associe l'application $TF: TM \rightarrow TN$, dont la restriction aux fibres $T_p M$ est TF_p . On laisse plusieurs points à vérifier :

- (A) TF est lisse ;
- (B) si $G: N \rightarrow P$ est lisse, alors $T(G \circ F) = TG \circ TF$.

1.20 LEMME. — Soient M un ensemble et $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ une collection, où les U_α sont des sous-ensembles de M , et φ_α sont des fonctions $U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, telle que

- (A) Pour tout α , la fonction φ_α est une bijection de U_α vers un ouvert $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^n$;
- (B) Pour tous α, β , les ensembles $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ et $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sont ouverts, et l'application de transition

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est de classe C^∞ .

- (C) M est recouvert par un nombre dénombrable de U_α ;
- (D) Pour tous points distincts $p, q \in M$, soit il existe α tel que $p, q \in U_\alpha$, ou alors il existe deux ensembles disjoints U_α, U_β tels que $p \in U_\alpha$ et $q \in U_\beta$.

Alors M admet une unique structure de variété différentielle qui fait de chaque $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ une carte.

1.21 (Foncteurs). — Étant données deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$, on appelle *foncteur covariant* $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ la donnée, pour chaque objet X de $\mathbf{C}$, d'un objet $F(X)$ de $\mathbf{D}$, et pour chaque flèche $f: X \rightarrow Y$ de $\mathbf{C}$ d'une flèche $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ de $\mathbf{D}$, de telle sorte que

- (A) pour tout $X \in \text{ob}(\mathbf{C})$, on a $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$;
- (B) pour tous $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

À l'opposé, on parle de foncteur *contravariant* lorsque le sens des flèches est inversé : un foncteur contravariant envoie $f \in \text{Hom}(X, Y)$ vers $F(f) \in \text{Hom}(F(Y), F(X))$, et la propriété (B) est remplacée par

- (B') pour tous $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$, on a $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Le langage des variétés différentielles regorge de foncteurs. Par exemple, le foncteur T , covariant, de Diff dans Diff . Un exemple de foncteur contravariant est C^∞ , qui va de Diff vers la catégorie des $\mathbb{R}$ -algèbres, associe à une variété M l'algèbre des fonctions $C^\infty(M)$ et à une application lisse $F: M \rightarrow N$ le morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres :

$$F^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M): f \mapsto F^*f = f \circ F.$$

On a vu implicitement ce foncteur apparaître dans la définition des applications tangentielles.

1.4 Immersions et submersions

On rappelle le théorème d'inversion locale. Tous les résultats de cette section en seront des conséquences, dans le langage des variétés. Ce théorème exprimant un résultat local, il est immédiatement suivi de sa traduction dans les variétés.

1.22 THÉORÈME (Inversion locale). — Soit F une application C^∞ entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$. Si la différentielle de F en un point $p \in U$ est un isomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert $U' \subseteq U$ de p tel que $F(U')$ soit ouvert et F soit un difféomorphisme de U' sur $F(U')$.

1.23 COROLLAIRE. — Soit F une application C^∞ entre deux variétés M et N de même dimension. Si TF_p est un isomorphisme en un point $p \in M$, alors il existe un voisinage ouvert U de p tel que $F(U)$ soit ouvert et F soit un difféomorphisme de U sur $F(U)$.

1.24. — Le résultat précédent permet un passage de l'échelle infinitésimale à l'échelle locale. D'autres questions se posent immédiatement : si TF_p est injective (resp. surjective), est-ce que F est localement injective (resp. surjective) ? Nous allons y répondre affirmativement. Introduisons quelques points de vocabulaire. Pour une application $F: M \rightarrow N$ entre variétés, on dit que

- (A) F est une *immersion* si TF_p est injective en tout point $p \in M$;
- (B) F est une *submersion* si TF_p est une surjection en tout point $p \in M$;
- (C) F est un *difféomorphisme local* lorsque F est à la fois une immersion et submersion.

La terminologie du point (C) vient évidemment du théorème d'inverse locale. Notons qu'un difféomorphisme local n'est pas nécessairement injectif, c'est le cas par exemple de la fonction $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dans lui-même.

1.25 LEMME. — Soient M une variété de dimension n , et $x^1, \dots, x^n$ des applications C^∞ définies dans un voisinage U de p . Si les différentielles $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$ forment une base de T_p^*M , alors il existe un ouvert $U' \subseteq U$ contenant p tel que $(U', (x^1, \dots, x^n))$ soit une carte locale.

Démonstration. Notons $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application $p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p))$, qui est de classe C^∞ . On considère l'application ψ_p^* induite sur les espaces cotangents. Notons $y^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur la i -ème coordonnée. On sait que (voir 1.18)

$$\varphi_p^*(dy^i|_{\varphi(p)}) = d(y^i \circ \varphi)|_p = dx^i|_p$$

Il suit que φ_p^* est surjective, c'est donc un isomorphisme, et il en va de même pour l'application tangente $T\varphi_p$. On conclut avec le corollaire 1.23. $\square$

1.26 THÉORÈME (Écriture locale des immersions et submersions). — Soit $F: M \rightarrow N$ une application C^∞ entre deux variétés de dimensions respectives m et n . Soit $p \in M$.

- (A) Si TF_p est injective, il existe des cartes, au départ et à l'arrivée, centrées en p et $F(p)$, dans lesquelles F se lit

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$$

- (B) Si TF_p est surjective, il existe des cartes, au départ et à l'arrivée, centrées en p et $F(p)$, dans lesquelles F se lit

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

Démonstration. On commence par le point (B), légèrement plus simple. Soit $(U, (y^1, \dots, y^m))$ une carte centrée en p et $(V, (x^1, \dots, x^n))$ une carte centrée en $F(p)$. L'application F_p^* entre espaces cotangents est l'adjointe d'une surjection, elle est donc injective. Elle envoie donc les $dx^i|_{F(p)}$ ($1 \leq i \leq n$) sur la famille libre constituée des $F_p^*(dx^i|_{F(p)}) = d(x^i \circ F)|_p$. Comme par

ailleurs les $dy_p^1, \dots, dy_p^m$ forment une base de T_p^*M , quitte à permuter les y^i , on peut supposer que

$$d(x^1 \circ F)|_p, \dots, d(x^m \circ F)|_p, dy_p^1, \dots, dy_p^{m-n}$$

est une base de T_p^*M . Par le lemme 1.25, on peut choisir $U' \subseteq U \cap F^{-1}(V)$ tel que $(U', (x^1 \circ F, \dots, x^m \circ F, y^1, \dots, y^{m-n}))$ soit une carte. En utilisant cette carte au départ, et $(V, (x^1, \dots, x^m))$ à l'arrivée, F se lit comme souhaité.

Pour le point (A), on démarre avec une carte (V, ψ) centrée en $F(p)$, et l'on note $\psi = (x^1, \dots, x^n)$. Cette fois, la base $dx_{F(p)}^i$ est envoyée par F_p^* sur la famille $d(x^i \circ F)|_p$, génératrice de T_p^*M . Quitte à permuter les coordonnées, on peut donc supposer que les m premiers éléments $d(x^i \circ F)_p$ ($1 \leq i \leq m$) forment une base de T_p^*M . Ainsi, par le lemme 1.25, il existe un voisinage ouvert $U \subseteq F^{-1}(V)$ de p tel que (U, φ) , avec $\varphi = (x^1 \circ F, \dots, x^m \circ F)$, soit une carte locale. Pour le moment, entre les cartes de domaine U et V , l'application F se lit

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, g_1(x^1, \dots, x^m), \dots, g_{n-m}(x^1, \dots, x^m))$$

où les $g_i \in C^\infty(\varphi(U))$. On va mettre à zéro des dernières coordonnées en effectuant un changement de cartes à l'arrivée. On laisse au lecteur le soin de vérifier que qu'on peut appliquer en 0 le théorème d'inversion locale à l'application $\varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^m, x^{m+1} - g_1(x^1, \dots, x^m), \dots, x^n - g_{n-m}(x^1, \dots, x^m))$$

et qu'on obtient ainsi un difféomorphisme entre $\theta: W \rightarrow \theta(W)$ entre deux ouverts contenant 0. L'application F se lit comme il faut entre les cartes (U, φ) et $(V \cap \psi^{-1}(W), \theta \circ \psi)$. $\square$

1.5 Sous-variétés

1.27 (Sous-variétés immergées). — La situation est assez compliquée, car il existe plusieurs notions de sous-variétés. On commence par la plus générale. Soit M une variété. On appelle *sous-variété immergée* de M la donnée de (S, ι) , où S est une variété et $\iota: S \rightarrow M$ est une immersion injective.

Comme ι est injective, on obtient une bijection entre S et $\iota(S)$, et on pourrait transporter la structure différentielle de S vers $\iota(S)$. En d'autres termes, on peut toujours imaginer que $S \subseteq M$. Mais attention, la topologie de S n'est pas celle induite de M . Elle peut être plus fine.

1.28 (Exemple). — Quatre manières d'immerger $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

1.29. — On dit qu'une application $F: M \rightarrow N$ est un *plongement* lorsque $F: M \rightarrow F(M)$ est un homéomorphisme ($F(M)$ a ici la topologie induite) et $F: M \rightarrow N$ est une immersion.

La notion de plongement est extrêmement proche de celle de sous-variété régulière. On appelle *sous-variété régulière* de M un sous-ensemble S , muni d'une structure de variété C^∞ , telle que l'application d'inclusion $\iota: S \rightarrow M$ soit un plongement. Nécessairement, la topologie de S doit être celle induite de M , et on verra bientôt que la structure différentielle à rajouter par-dessus est unique. En d'autres termes, le sous-ensemble S détermine totalement la sous-variété régulière S .

1.30 THÉORÈME. — Soient $F: M \rightarrow N$ une application lisse et (S, ι) une sous-variété immergée de N telle que $F(M) \subseteq \iota(S)$. Il existe alors une unique application G telle que $F = \iota \circ G$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ & \searrow G & \uparrow \iota \\ & & S \end{array}$$

- (A) Si G est continue, alors elle est lisse.
 (B) Si ι est un plongement, alors G est continue, et donc lisse.

Démonstration. (A). Soit $p \in M$. On appelle q le point de S tel que $\iota(q) = F(p)$. Par le théorème 1.26, il existe des cartes (U, φ) et (V, ψ) centrée en q et $F(p)$ respectivement, avec $\iota(U) \subseteq V$, dans lesquelles ι se lit

$$\hat{\iota}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V): (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$

Comme G est continue, il existe une carte (W, θ) centrée en p telle que $G(W) \subseteq U$. S'il on note $\hat{F}$ et $\hat{G}$ les lectures de F et G , on a $\hat{F} = \hat{\iota} \circ \hat{G}$, ce qui force $\hat{G}$ à être C^∞ .

Pour le point (B), la continuité est évidente, puis on applique (A). $\square$

1.31 COROLLAIRE. — Soient M une variété, $S \subseteq M$ un sous-ensemble et $\iota: S \rightarrow M$ l'application d'inclusion.

- (A) S'il on fixe une topologie sur S , il n'y a au plus qu'une seule structure différentielle sur S faisant de (S, ι) une sous-variété immergée.
 (B) Il n'y a au plus qu'une seule structure de sous-variété régulière sur S .

1.6 Champs de vecteurs

1.32. — On appelle *champ de vecteurs* sur une variété M une application $X: M \rightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = \text{id}_M$, autrement dit $X_p \in T_p M$ en tout point p . On notera $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^∞ . Il nous arrivera aussi de considérer aussi des champs de vecteurs définis localement, à savoir des applications $X: U \rightarrow TM$ d'un ouvert U , vérifiant $X_p \in T_p M$ pour tout p . Par exemple, si $(U, (x^1, \dots, x^n))$ est une carte locale, alors $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sont des champs de vecteurs définis sur U .

Si $X: M \rightarrow TM$ est un champ de vecteurs et $f \in C^\infty(U)$ (avec $U \subseteq M$ ouvert), on appelle $Xf: U \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui envoie p sur $X_p f$ (on rappelle que X_p est une dérivation en p).

1.33 PROPOSITION. — Soit X un champ de vecteurs sur M . Alors X est lisse si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

- (A) sur chaque carte locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$, le champ de vecteurs X s'écrit

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{avec } X^i \in C^\infty(U)$$

- (B) Pour tout ouvert U et $f \in C^\infty(U)$, on a $Xf \in C^\infty(U)$;
 (C) Pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a $Xf \in C^\infty(M)$.

Démonstration. On montre d'abord l'équivalence entre (A) et $X \in \mathcal{X}(M)$. On rappelle que le fibré tangent est recouvert par des cartes de la forme $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, construites à partir d'une carte (U, φ) de M , avec

$$\tilde{\varphi}: (p, v) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v(x^1), \dots, v(x^n))$$

où $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Entre les cartes (U, φ) et $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, le champ de vecteur X se lit

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, X^1 \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n), \dots, X^n \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n))$$

et le caractère C^∞ de cette application est équivalent à celui des X^i .

On montre maintenant (A) $\implies$ (B). Comme (B) est un énoncé local, on peut supposer que U est le domaine d'une carte. Mais alors (B) est conséquence de

$$Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

L'implication réciproque (B) $\implies$ (A) utilise simplement la formule $X^i = Xx^i$. Pour terminer, l'équivalence (B) $\iff$ (C) provient de la nature locale des dérivations $((Xf)|_U = X(f|_U)$ pour tout ouvert U). $\square$

1.34 (Dérivations). — Le point (C) de la proposition précédente montrent en particulier que les éléments de $\mathcal{X}(M)$ sont en correspondance avec les *dérivations*, à savoir les applications linéaires $D: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ vérifiant la règle de Leibniz $D(fg) = fDg + gDf$ pour tous $f, g \in C^\infty(M)$.

1.35 (Opérations sur $\mathcal{X}(M)$). — La somme de deux champs de vecteurs est bien définie $(X + Y)_p = X_p + Y_p$, et il est facile de vérifier que $X + Y$ est lisse si X, Y le sont.

De même, on peut multiplier un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ par une fonction $f \in C^\infty(M)$, par $(fX)_p = f(p)X_p$. Le résultat fX est lisse. Ces opérations font de $\mathcal{X}(M)$ un module sur l'anneau $C^\infty(M)$.

Ces opérations sont plus ou moins claires. Une opération tout à fait nouvelle est le *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs X, Y de classe C^∞ , défini par $[X, Y] = XY - YX$. Ici, X et Y sont vues comme des dérivations, et on vérifie de manière purement algébrique que $[X, Y]$ vérifie la règle de Leibniz. En effet, pour $f, g \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= XY(fg) - YX(fg) \\ &= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\ &= XfYg + fXYg + XgYf + gXYf - (YfXg + fYXg + YgXf + gYXf) \\ &= f(XYg - YXg) + g(XYf - YXf) \\ &= f[X, Y]g + g[X, Y]f. \end{aligned}$$

L'une des motivations de ce cours sera de donner un sens géométrique au crochet de Lie. Pour le moment, constatons que, si $(U, (x^1, \dots, x^n))$ est une carte locale, alors les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ commutent pour le crochet de Lie (c'est le théorème de Schwarz). En un sens, le crochet de Lie mesure le défaut qu'a un repère local à donner naissance à une carte locale. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on vérifie que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y}$$

Le crochet de Lie vérifie les identités suivantes

(A) si $f, g \in C^\infty(M)$, alors $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$;

(B) $[X, Y] = -[Y, X]$;

(C) (Identité de Jacobi) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Un espace vectoriel V muni d'une opération bilinéaire $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ vérifiant (B) et (C) s'appelle *algèbre de Lie*.

1.36. — Si $F: M \rightarrow N$ est une application C^∞ , il n'est pas possible de pousser en avant, ou tirer en arrière des champs de vecteurs par F . En revanche, si F est un difféomorphisme local, on peut associer à un champ $Y \in \mathcal{X}(N)$ le champ $F^*Y \in \mathcal{X}(M)$ défini par

$$(F^*Y)_p = (TF_p)^{-1}Y_{F(p)}.$$

Lorsque F est un difféomorphisme et $X \in \mathcal{X}(M)$, on définit $F_*X = (F^{-1})^*X \in \mathcal{X}(N)$, c'est-à-dire $(F_*X)_p = TF_{F^{-1}(p)}X_{F^{-1}(p)}$.

Dans le cas général où F est seulement C^∞ , on dit que deux champs $X \in \mathcal{X}(M)$ et $Y \in \mathcal{X}(N)$ sont *F-reliés* lorsque $TF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ pour tout p (par définition de T , cela revient à demander que $X(f \circ F) = (Yf) \circ F$ pour tout $f \in C^\infty(N)$), mais il peut exister plusieurs (et même aucun) champs Y qui soient *F-reliés* à X . La proposition suivante exprime

la naturalité du crochet de Lie, et implique en particulier que $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$ pour tout difféomorphisme F .

1.37 PROPOSITION. — Soient $F: M \rightarrow N$ une application lisse, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ et $X', Y' \in \mathcal{X}(N)$. Si X, X' d'une part et Y, Y' d'autre part sont F -reliés, alors $[X, Y]$ et $[X', Y']$ sont F -reliés.

Démonstration. Soit $f \in C^\infty(N)$. On a

$$\begin{aligned} [X, Y](f \circ F) &= XY(f \circ F) - YX(f \circ F) \\ &= X((Y'f) \circ F) - Y((X'f) \circ F) \\ &= (X'Y'f) \circ F - (Y'X'f) \circ F \\ &= ([X', Y']f) \circ F \end{aligned} \quad \square$$

1.38 (Courbes intégrales). — Soit $X \in \mathcal{X}(M)$. On appelle *courbe intégrale* de X une courbe paramétrée $\gamma: I \rightarrow M$ (I étant un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$) vérifiant $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ en tout $t \in I$.

L'existence, au moins pour des temps courts, d'une courbe intégrale passant par un point $p \in M$, c'est-à-dire d'une solution de

$$\begin{cases} \gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = p \end{cases}$$

sur un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$, est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz (local), en passant en coordonnées locales. On appelle *solution maximale* du problème de Cauchy ci-dessus une solution qui n'admet pas de prolongement (autre qu'elle-même). Les résultats bien connus concernant les EDO impliquent que deux solutions coïncident sur l'intersection de leurs domaines, et donc qu'il existe une unique solution maximale, obtenue en recollant toutes les solutions locales.

1.39 (Flot d'un champ de vecteurs). — On va enrichir légèrement notre point de vue, en prenant en compte la dépendance en la condition initiale. Pour un temps t et un point $p \in M$, on appelle $\theta(t, p)$ la valeur au temps t de la courbe intégrale (maximale) passant par p au temps 0. L'application θ s'appelle le *flot* (maximal) de X , car elle décrit l'écoulement le long de X . Bien sûr, une grande difficulté ici vient du fait que les courbes intégrales n'ont qu'une existence locale, si bien que θ n'est pas nécessairement défini que sur une partie $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$. À présent, on sait que, pour tout $p \in M$,

$$\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

est un intervalle ouvert contenant 0. Mais on va montrer beaucoup mieux. Pour un temps t , on note également

$$M_t = \{p \in M : (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

Pour tout t , on note θ_t l'application partielle $p \mapsto \theta(t, p)$, définie sur M_t . Alors Les propriétés suivantes découlent assez facilement de la définition du flot.

- (A) $M_0 = M$ et $\theta_0 = \text{id}_M$;
- (B) pour tout $(s, p) \in \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D}^{(\theta(s, p))} = \mathcal{D}^{(p)} - s$;
- (C) pour tous $(s, p) \in \mathcal{D}$ et $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$, on a $\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$;
- (D) θ_t est une bijection de M_t vers M_{-t} , d'inverse θ_{-t} .

Le point (E) ci-dessous nécessite un théorème plus puissant que le théorème de Cauchy-Lipschitz, à savoir le théorème du flot local.

(F) $\mathcal{D}$ est ouvert et $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ est C^∞ ;

(G) En conséquence, θ_t est un difféomorphisme $M_t \rightarrow M_{-t}$.

La situation est grandement simplifiée lorsque $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times M$. Auquel cas, on dit que le champ de vecteurs X est *complet*. Alors $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe paramétré de difféomorphismes de M . Un exemple de champ de vecteurs qui n'est pas complet est $\frac{d}{dt}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On laisse au lecteur le soin de démontrer que tout champ à support compact est complet.

1.40 (Dérivée de Lie). — La dérivée de Lie décrit la variation d'une « quantité » le long des courbes intégrales d'un champ de vecteurs. Plus tard dans le cours, nous serons capable de définir la dérivée de Lie de tout champ tensoriel. Ici, nous regardons la dérivée de Lie d'un champ $Y \in \mathcal{X}(M)$ par rapport à un champ $X \in \mathcal{X}(M)$ dont le flot est noté θ . C'est le champ défini par

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T_{\theta_{-t}})_{\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)} - Y(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((T_{\theta_{-t}})_{\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)})$$

La proposition suivante montre que l'on obtient ainsi le crochet de Lie. La preuve montre au passage l'existence de la limite ci-dessus.

1.41 PROPOSITION. — $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Démonstration. Nous proposons ici la preuve la plus laide qui soit, à savoir faire les calculs dans une carte. Localement, on écrit

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Et on a, pour t petit,

$$\begin{aligned} (T_{\theta_{-t}})_{\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)} &= (T_{\theta_{-t}})_{\theta_t(p)} \left(Y^i(\theta(t, p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\theta_t(p)} \right) \\ &= Y^i(\theta(t, p)) \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i}(-t, \theta_t(p)) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \end{aligned}$$

(avec $\theta^j = x^j \circ \theta$). Il ne reste plus qu'à dériver par rapport au temps. Coordonnée par coordonnée, cela donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(Y^i(\theta(t, p)) \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i}(-t, \theta_t(p)) \right) &= \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(\theta(t, p)) \frac{\partial \theta^k}{\partial t}(t, p) \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i}(-t, \theta_t(p)) \\ &\quad - Y^i(\theta(t, p)) \frac{\partial^2 \theta^j}{\partial x^i \partial t}(-t, \theta_t(p)) + Y_i(\theta(t, p)) \frac{\partial^2 \theta^j}{\partial x^i \partial x^k}(-t, \theta_t(p)) \frac{\partial \theta^k}{\partial t}(t, p) \end{aligned}$$

On va évaluer au temps $t = 0$. On rappelle que $\theta(0, \cdot) = \text{id}_M$, si bien que

$$\frac{\partial \theta^j}{\partial x^i}(0, \cdot) = \delta_i^j, \quad \frac{\partial^2 \theta^j}{\partial x^i \partial x^k}(0, \cdot) = 0, \quad \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i \partial t}(0, \cdot) = \frac{\partial X^j}{\partial x^i}$$

(la dernière égalité demande une petite vérification). Il reste donc

$$\left. \frac{d}{dt} \left(Y^i(\theta(t, p)) \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i}(-t, \theta_t(p)) \right) \right|_{t=0} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} X^k - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}$$

évalué en p . Ainsi $(\mathcal{L}_X Y)_p$ existe et vaut

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}(p) X^i(p) - Y^i(p) \frac{\partial X^j}{\partial x^i}(p) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$$

Cela coïncide avec $[X, Y]_p$, comme on peut le montrer simplement en appliquant 1.35(A). $\square$

2 Intégration des formes différentielles

2.1 Tenseurs et champs tensoriels

2.1 (Formes multilinéaires). — Soient $V_1, \dots, V_k$ des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. On dit qu'une application $V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$ est *multilinéaire* lorsqu'elle est linéaire en chacune de ses variables. On note $L(V_1, \dots, V_k)$ l'espace vectoriel des formes multilinéaires.

Le *produit tensoriel* de deux formes multilinéaires $\alpha \in L(V_1, \dots, V_k)$ et $\beta \in L(W_1, \dots, W_\ell)$ est la forme multilinéaire $\alpha \otimes \beta \in L(V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_\ell)$ définie par

$$\alpha \otimes \beta(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell) = \alpha(v_1, \dots, v_k) \otimes \beta(w_1, \dots, w_\ell).$$

2.2 (Tenseurs). — Nous nous intéresserons qu'à une partie des formes multilinéaires. Nous fixons un espace vectoriel V de dimension finie, que l'on notera n . On appelle *tenseur covariant* de rang k (avec $k \geq 1$) sur V une forme m -multilinéaire sur V^k . On note $T^k(V^*)$ l'espace des tenseurs covariants de rang k sur V . Cette notation se justifie par le fait que $T^1(V^*) = V^*$. On adoptera la convention que $T^0(V^*) = \mathbb{R}$, les 0-tenseurs sont les nombres réels. On doit également définir le produit tensoriel d'un 0-tenseur $\lambda \in \mathbb{R}$ avec un k -tenseur α , c'est tout simplement $\lambda\alpha \in T^k(V^*)$.

Il existe aussi une notion de tenseur contravariant, qui jouera un rôle un peu moins important. Un *tenseur contravariant* de rang ℓ ($\ell \geq 1$) est une forme ℓ -multilinéaire sur $(V^*)^\ell$, et cette fois, on note $T^\ell(V)$ l'espace vectoriel formé par ces tenseurs. Comme précédemment, les 0-tenseurs contravariants sont par convention les nombres réels. En particulier on note qu'on peut identifier $T^1(V) = V^{**}$ à V (les éléments de V sont les seuls 1-tenseurs que l'on considérera).

Enfin, on peut également définir une notion de tenseur mixte, covariant en certaines variables et contravariants en d'autres, c'est-à-dire, des formes multilinéaires de la forme

$$V \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

(où V et V^* peuvent être situés en n'importe quelle position). Les endomorphismes $V \rightarrow V$ sont des exemples de tenseurs mixtes, puisqu'ils s'identifient naturellement aux formes multilinéaires $V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$. En géométrie riemannienne, le tenseur de courbure est un exemple de tenseur mixte. Nous n'en aurons pas besoin.

2.3 (Coordonnées d'un tenseur). — On peut créer, à partir d'une base $E_1, \dots, E_n$, une base de $T^k(V^*)$. Notons en effet $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ la base duale de V^* . On prétend que tout k -tenseur covariant se décompose de manière unique

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{i_k}$$

où les coordonnées vérifient $\omega_{i_1, \dots, i_k} = \omega(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})$. Une propriété similaire est valable aux tenseurs contravariants $\alpha \in T^k(V)$

$$\alpha = \alpha^{i_1, \dots, i_k} E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_k}$$

où $\alpha_{i_1, \dots, i_k} = \alpha(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_k})$. (Ici, les vecteurs E_j sont vus comme appartenant à V^{**}). On en déduit au passage que $T^k(V^*)$ et $T^k(V)$ sont de dimension n^k .

2.4 (Fibré des k -tenseurs covariants). — Cette fois, on fixe une variété M de dimension n . Un k -tenseur covariant en p est simplement un élément de $T^k(T_p^*M)$, comme dans les paragraphes précédents, où l'espace de base est $V = T_pM$. Lorsque p varie, on peut amalgamer tous ces espaces vectoriels dans le *fibré des k -tenseurs covariants*, dont la construction est analogue à celle du fibré tangent. On construit tout d'abord l'ensemble

$$T^k(T^*M) = \coprod_{p \in M} T^k(T_p^*M) = \left\{ (p, \omega) : p \in M \text{ et } \omega \in T^k(T_p^*M) \right\}$$

et on note $\pi: T^k(T^*M) \rightarrow M$ la projection $(p, \omega) \mapsto p$ sur la variété de base. Si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ désigne l'atlas maximal de M , on peut créer à partir de la carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sur M une carte $(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$ sur le fibré, où $\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ et $\tilde{\varphi}_\alpha: \tilde{U}_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{n^k}$ est l'application

$$(p, \omega) \mapsto (\varphi_\alpha(p), (\omega_{i_1, \dots, i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n})$$

où $\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{|p}^{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{|p}^{i_k}$ (de sorte que la lecture de (p, ω) dans la carte correspond à la concaténation des coordonnées de p et de celles de ω). Pour bien vérifier que $T^k(T^*M)$ soit une variété, il faut appliquer le lemme 1.20. De manière analogue, on peut construire le fibré des k -tenseurs contravariants (le fibré tangent en est un exemple!).

2.5 (Champs k -tensoriels). — Un champ k -tensoriel covariant est une section du fibré $T^k(T^*M)$, c'est-à-dire une application $\omega: M \rightarrow T^k(T^*M)$ qui vérifie $\omega|_p \in T_k(T_p^*M)$ pour tout $p \in M$ (où, de manière équivalente $\pi \circ \omega = \text{id}_M$). Ils forment un ensemble que l'on note $\Gamma(T^k(T^*M))$. On définit de manière analogue l'ensemble des champs k -tensoriels contravariants $\Gamma(T^k(TM))$.

Plusieurs opérations sont définies, toutes ont un sens ponctuels :

- (A) la somme de deux champs k -tensoriels $\omega + \eta: p \mapsto \omega|_p + \eta|_p$;
- (B) le produit entre une fonction $f \in C^\infty(M)$ et un champ k -tensoriel ω , défini par $f\omega: p \mapsto f(p)\omega|_p$;
- (C) le produit tensoriel d'un champ k -tensoriel et d'un champ ℓ -tensoriel $\omega \otimes \eta: p \mapsto \omega|_p \otimes \eta|_p$.
- (D) Si $X_1, \dots, X_k$ sont des champs de vecteurs, alors $A(X_1, \dots, X_k)$ est la fonction définie par

$$p \mapsto A|_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$$

(On laisse au lecteur le soin de vérifier le caractère lisse des objets construits). Les points (A) et (B) font des $\Gamma(T^k(T^*M))$ (resp. $\Gamma(T^k(TM))$) un $C^\infty(M)$ -module.

2.6 (Différentielle d'une fonction). — Si $f \in C^\infty(M)$, nous avons déjà défini, pour tout $p \in M$, le covecteur $df|_p \in T_p^*M$. Lorsque nous laissons la variable p varier, nous obtenons ainsi un champ 1-tensoriel covariant $p \mapsto df|_p$, noté plus simplement df . (Nous verrons plus tard que les champs 1-tensoriels covariants sont appelés 1-formes différentielles, et cette appellation est plus naturelle). Le lecteur pourra montrer que df est bien lisse, en utilisant la proposition venant juste après. Remarquons cependant, que si $(U, (x^1, \dots, x^n))$ est une carte, alors les champs $dx^1, \dots, dx^n$ (définis localement) sont bien lisses, par construction même de l'atlas de $T^1(T^*M)$. On montre

- (A) $d(fg) = f dg + g df$ pour $f, g \in C^\infty(M)$;
- (B) En coordonnées locales,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

La proposition suivante caractérise les champs tensoriels lisses. Elle est énoncée pour les champs covariants, mais une variante facile à trouver existe pour les champs contravariants. Elle se démontre de manière analogue à la proposition 1.33.

2.7 PROPOSITION. — *Soit ω un champ k -tensoriel covariant sur M , supposé a priori non lisse. Alors ω est lisse si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée*

- (A) *sur chaque carte locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$, le champ tensoriel ω s'écrit*

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$$

où les fonctions $\omega_{i_1, \dots, i_k}$ sont dans $C^\infty(U)$;

- (B) *Pour tout ouvert U et $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(U)$, on a $A(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(U)$;*

(C) Pour tout $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$, on a $A(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(M)$

2.8. — En particulier, par le point (C) de la proposition précédente, tout champ k -tensoriel contravariant (lisse) A définit une application

$$\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad (X_1, \dots, X_k) \mapsto A(X_1, \dots, X_k)$$

qui est $C^\infty(M)$ -multilinéaire. On la note également A . Le lemme suivant, important, fait le lien entre la tensorialité et la $C^\infty(M)$ -multilinéarité.

2.9 LEMME. — *Toute application $C^\infty(M)$ -multilinéaire $\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ provient d'un champ k -tensoriel covariant.*

Démonstration. Soit $p \in M$. Dans un premier temps, on souhaite montrer que

$$A(X_1, \dots, X_k)(p) = A(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(p) \quad (2)$$

lorsque les champs de vecteurs X_i et $\tilde{X}_i$ coïncident en p , pour tout $1 \leq i \leq k$. Comme, par multilinéarité,

$$\begin{aligned} A(X_1, \dots, X_k) - A(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k) &= A(X_1 - \tilde{X}_1, X_2, \dots, X_k) \\ &\quad + A(\tilde{X}_1, X_2 - \tilde{X}_2, X_3, \dots, X_k) + \dots + A(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{k-1}, X_k - \tilde{X}_k) \end{aligned}$$

il suffit de montrer le résultat suivant : « si $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{X}(M)$ et $Y_{i|p} = 0$, alors $A(Y_1, \dots, Y_k)(p) = 0$. » On ne perd pas grand chose à supposer que $i = 1$, ce que l'on fait par la suite.

On montre d'abord le résultat sous la condition plus forte que $Y_1 = 0$ sur un voisinage de p . Il existe alors une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$ telle que $\varphi(p) = 1$ et $\varphi Y_1 = 0$. Par multilinéarité,

$$\varphi A(Y_1, \dots, Y_k) = A(\varphi Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = 0$$

On obtient le résultat souhaité en évaluant au point p .

Maintenant, on suppose seulement que $Y_{1|p} = 0$. Notons $(U, (x^1, \dots, x^n))$ une carte locale autour de p , où, Y_1 s'écrit

$$Y_1 = Y_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Soient $\tilde{Y}_1^i$ (pour $1 \leq i \leq n$) des fonctions de $C^\infty(M)$ et $Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{X}(M)$ des champs tels que

$$\tilde{Y}_1^i = Y_1^i \text{ et } Z_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ au voisinage de } p$$

Alors, par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} A(Y_1, \dots, Y_k)(p) &= A\left(\tilde{Y}_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y_2, \dots, Y_k\right)(p) \\ &= \tilde{Y}_1^i(p) A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, Y_2, \dots, Y_k\right)(p) = 0 \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve de (2).

On peut donc définir une application $A|_p : (T_p M)^k \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$A|_p(v_1, \dots, v_k) = A(X_1, \dots, X_k)(p)$$

où $X_1, \dots, X_k$ sont des champs de vecteurs qui en p valent $v_1, \dots, v_k$. Il est clair que $A|_p$ est un k -tenseur, et que l'application $p \mapsto A|_p$ vérifie le critère (C) de la proposition 2.7. $\square$

2.10 (Contre-exemple). — À titre d'exemple, le crochet de Lie n'est pas $C^\infty(M)$ -multilinéaire, puisqu'il vérifie l'identité de Leibniz

$$[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]$$

Ce n'est donc pas un tenseur (mixte). On se souvient que $[X, Y]$ est la dérivée de Lie de Y par rapport au flot de X . Sa valeur en un point p nécessite de connaître Y sur tout un voisinage de p , et non seulement en p .

On a vu qu'on pouvait associer à une fonction $f \in C^\infty(M)$ un champ 1-tensoriel covariant df défini par

$$df(X) = Xf$$

La $C^\infty(M)$ -linéarité par rapport à X est ici claire. Plus intéressant, si ω est un champ 1-tensoriel covariant, on définit sa différentielle $d\omega$, un champ 2-tensoriel covariant, par

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

Pour le moment, nous cherchons simplement à illustrer le lemme 2.9, nous essaierons de donner à un sens à $d\omega$ plus tard dans le cours. Pour vérifier que $d\omega$ est un champ tensoriel, on doit établir la $C^\infty(M)$ -multilinéarité. Comme $d\omega$ vérifie la propriété d'antisymétrie $d\omega(Y, X) = -d\omega(X, Y)$, il suffit de montrer la $C^\infty(M)$ -linéarité à droite. Comme l'additivité est claire, il reste seulement à montrer que $d\omega(X, fY) = f d\omega(X, Y)$. Or

$$\begin{aligned} d\omega(X, fY) &= X\omega(fY) - fY\omega(X) - \omega([X, fY]) \\ &= X(f\omega(Y)) - fY\omega(X) - \omega(XfY + f[X, Y]) \\ &= Xf \cdot \omega(Y) + fX\omega(Y) - f(Y)\omega(X) - Xf \cdot \omega(Y) - f\omega([X, Y]) \\ &= f(X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])) \\ &= f d\omega(X, Y) \end{aligned}$$

2.11 (Pullback). — Soit $F: M \rightarrow N$ une application lisse. À tout champ k -tensoriel covariant A défini sur la variété N , on peut associer un *pullback* (ou bien un *tiré en arrière*) F^*A , qui est un champ sur la variété de départ M . Cette construction est spécifique aux champs covariants. On définit en effet

$$(F^*A)|_p(v_1, \dots, v_k) = A|_{F(p)}(TF_p(v_1), \dots, TF_p(v_k))$$

pour $p \in M$ et $v_1, \dots, v_k \in T_pM$. Dans le cas particulier $k = 0$, les champs 0-tensoriels s'identifient aux fonctions $f \in C^\infty(N)$. On a alors $F^*f = f \circ F$.

Les propriétés suivantes sont facilement vérifiées.

- (A) $F^*(A + B) = F^*A + F^*B$;
- (B) $F^*(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$;
- (C) $F^*(fA) = F^*f F^*A$;
- (D) $F^*(df) = d(F^*f)$

Elles permettent notamment de montrer que le pullback d'un champ tensoriel reste lisse, comme attendu, en passant par les écritures locales.

2.2 Tenseurs alternés et formes différentielles

2.12 (Tenseurs alternés). — Parmi les k -tenseurs covariants ω sur un espace vectoriel V , ceux vérifiant la propriété

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) \omega(v_1, \dots, v_k)$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ et tous $v_1, \dots, v_k \in V$ sont dits *alternés*. L'espace vectoriel des k -tenseurs (covariants) alternés est noté $\Lambda^k(V^*)$. Il forme un sous-espace vectoriel de $T^k(V^*)$.

2.13 (Une base de $\Lambda^k(V^*)$). — Fixons à nouveau une base $E_1, \dots, E_n$ de V . On appelle *multi-indice* (de taille k) une famille $I = (i_1, \dots, i_k)$ ordonnée d'indices entre 1 et n . La famille I peut contenir des répétitions. On définit le k -tenseur ε^I par

$$\varepsilon^I(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \varepsilon^{i_1}(v_2) & \dots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \varepsilon^{i_2}(v_1) & \varepsilon^{i_2}(v_2) & & \varepsilon^{i_2}(v_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \varepsilon^{i_k}(v_2) & \dots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix}$$

Par les propriétés du déterminant, il est clair que ε^I est alterné. On vérifie tout aussi facilement que

- (A) $\varepsilon^I = 0$ si I contient une répétition ;
- (B) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, en notant $I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$ le multi-indice permuté, on a $\varepsilon^{I_\sigma} = (\text{sgn } \sigma) \varepsilon^I$;
- (C) Si $J = (j_1, \dots, j_k)$ est un multi-indice de taille k , alors

$$\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \begin{cases} \text{sgn } \sigma & \text{si } I \text{ est sans répétition et si } J = I_\sigma \text{ pour } \sigma \in \mathfrak{S}_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les points précédents montrent que, si l'on se restreint aux multi-indices *croissants* sans répétition, les ε^I forment une base de $T^k(V^*)$, et de plus

$$\omega = \omega_I \varepsilon^I \text{ avec } \omega_I = \omega(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}) \text{ pour } I = (i_1, \dots, i_k)$$

(où la somme court sur les multi-indices croissants de taille k sans répétition, ce que nous supposons implicitement par la suite chaque fois que ce sera approprié). On en déduit que

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}.$$

2.14. — Si $\alpha \in T^k(V^*)$, on lui associe le tenseur $\text{Alt}(\alpha) \in T^k(V^*)$ défini par

$$\text{Alt}(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\text{sgn } \sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

On laisse au lecteur le soin de montrer que $\text{Alt}: T_k(V^*) \rightarrow T_k(V^*)$ est une projection ($\text{Alt} \circ \text{Alt} = \text{Alt}$) sur $\Lambda^k(V^*)$.

2.15. — Le produit tensoriel d'un tenseur $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ et d'un autre $\eta \in \Lambda^\ell(V^*)$ n'est pas nécessairement alterné. Pour pallier cet inconvénient, on introduit le produit extérieur

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k + \ell)!}{k! \ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

Le facteur de normalisation peut paraître étonnant. Il se justifie par le résultat suivant.

2.16 PROPOSITION. — Soient $I = (i_1, \dots, i_k)$ et $J = (j_1, \dots, j_\ell)$ deux multi-indices. Alors

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}$$

où $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell)$ désigne la concaténation de I et J .

Démonstration. Si I ou J admet une répétition, alors il en va de même pour IJ , et donc $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = 0$. Nous supposons donc par la suite I et J sans répétition. Par multilinéarité, il suffit de montrer

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+\ell}}) = \varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+\ell}}) \quad (3)$$

pour tout multi-indice $P = (p_1, \dots, p_{k+\ell})$ de taille $k + \ell$. Si P admet une répétition, alors les deux membres de part et d'autre de l'égalité de (3) sont nuls, aussi nous supposons P sans répétition. Nous séparons la preuve en plusieurs cas.

- Si le multi-indice P possède un indice n'apparaissant ni dans I ni dans J , alors clairement le second membre de (3) est nul, et par ailleurs, tous les termes de la somme

$$\begin{aligned} & \varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+\ell}}) \\ &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} (\text{sgn } \sigma) \varepsilon^I(E_{p_{\sigma(1)}}, \dots, E_{p_{\sigma(k)}}) \varepsilon^J(E_{p_{\sigma(k+1)}}, \dots, E_{p_{\sigma(k+\ell)}}) \end{aligned} \quad (4)$$

sont nuls.

- Dans le cas contraire, supposons que tous les indices de P apparaissent soit dans I , soit dans J . Comme P est supposé sans répétition (et que les tailles de I , J et P sont respectivement k , ℓ et $k + \ell$), cela impose que I et J n'aient pas d'indice commun. Quitte à permuter les indices de P (ce qui revient à multiplier chaque membre de part et d'autre de l'égalité (3) par la même quantité ± 1), on peut supposer

$$(p_1, \dots, p_k) = (i_1, \dots, i_k) \text{ et } (p_{k+1}, \dots, p_{k+\ell}) = (j_1, \dots, j_\ell)$$

Le membre de droite dans (3) vaut à présent 1, et celui de gauche est à nouveau donné par (4), sauf que cette fois, les seuls termes (potentiellement) non nuls de la somme sont dus aux permutations σ qui stabilisent $\{1, 2, \dots, k\}$ et $\{k+1, \dots, k+\ell\}$, c'est-à-dire les permutations de la forme

$$\sigma(i) = \begin{cases} \sigma_1(i) & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ k + \sigma_2(i - k) & \text{si } k+1 \leq i \leq k+\ell \end{cases}$$

où $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_k$ et $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_\ell$. Pour une telle permutation, on a $\text{sgn } \sigma = (\text{sgn } \sigma_1)(\text{sgn } \sigma_2)$. On a donc

$$\begin{aligned} & \varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+\ell}}) \\ &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} (\text{sgn } \sigma_1)(\text{sgn } \sigma_2) \varepsilon^I(E_{i_{\sigma_1(1)}}, \dots, E_{i_{\sigma_1(k)}}) \varepsilon^J(E_{j_{\sigma_2(1)}}, \dots, E_{j_{\sigma_2(\ell)}}) \\ &= \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_k} (\text{sgn } \sigma_1) \varepsilon^I(E_{i_{\sigma_1(1)}}, \dots, E_{i_{\sigma_1(k)}}) \right) \left(\frac{1}{\ell!} \sum_{\sigma_2 \in \mathfrak{S}_\ell} (\text{sgn } \sigma_2) \varepsilon^J(E_{j_{\sigma_2(1)}}, \dots, E_{j_{\sigma_2(\ell)}}) \right) \\ &= \varepsilon^I(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}) \varepsilon^J(E_{j_1}, \dots, E_{j_\ell}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

2.17. — Les propriétés suivantes de $\wedge$ peuvent être déduites de la proposition précédente. Par bilinéarité de $\wedge$, on les prouve typiquement en raisonnant sur des tenseurs du type ε^I .

(A) $\wedge$ est associatif : $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;

(B) $\wedge$ est anticommutatif, au sens où

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{k\ell} \omega \wedge \eta$$

si $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ et $\eta \in \Lambda^\ell(V^*)$.

(C) Si $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$ sont des covecteurs, le produit extérieur se calcule plus facilement par la formule

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega^1(v_1) & \omega^1(v_2) & \dots & \omega^1(v_k) \\ \omega^2(v_1) & \omega^2(v_2) & & \omega^2(v_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \omega^k(v_1) & \omega^k(v_2) & \dots & \omega^k(v_k) \end{pmatrix}$$

lorsque $v_1, \dots, v_k \in V$.

En particulier, l'anticommutativité implique que $\omega^2 = \omega \wedge \omega = 0$ si ω est un tenseur alterné de rang impair.

Avant d'introduire les formes différentielles, nous introduisons le résultat suivant sur les tenseurs alternés de rang n sur un espace de dimension n .

2.18 LEMME. — Soient $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ et $T: V \rightarrow V$ un endomorphisme. Alors

$$\omega(T(v_1), \dots, T(v_n)) = (\det T) \omega(v_1, \dots, v_n)$$

pour tout $v_1, \dots, v_n \in V$.

Démonstration. On évacue le cas trivial où $\omega = 0$. Il est clair que l'application $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \omega(T(v_1), \dots, T(v_n))$ appartient à la droite vectorielle $\Lambda^n(V^*)$. Il existe donc un scalaire λ tel que

$$\omega(T(v_1), \dots, T(v_n)) = \lambda \omega(v_1, \dots, v_n)$$

pour tout $v_1, \dots, v_n \in V$. Et il reste à démontrer que $\lambda = \det T$. Pour cela, on fixe une base $E_1, \dots, E_n$ de V . Alors $T(E_j) = T_j^i E_i$, où T_j^i sont les coefficients de la matrice représentative de T . Ainsi

$$\omega(T(E_1), \dots, T(E_n)) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n} \omega(E_{i_1}, \dots, E_{i_n}) \quad (5)$$

Or $\omega(E_{i_1}, \dots, E_{i_n}) = 0$ dès que deux indices sont égaux. On peut donc se restreindre à sommer sur les permutations dans (5)

$$\begin{aligned} \omega(T(E_1), \dots, T(E_n)) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_1^{\sigma(1)} \dots T_n^{\sigma(n)} \omega(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) T_1^{\sigma(1)} \dots T_n^{\sigma(n)} \omega(E_1, \dots, E_n) \\ &= (\det T) \omega(E_1, \dots, E_n) \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve. □

2.19 (Formes différentielles). — Le *fibré des k -tenseurs covariants alternés* sur une variété M se construit de manière similaire aux autres fibrés rencontrés dans ce cours. On définit l'ensemble

$$\Lambda^k T^*M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M) = \left\{ (p, \omega) : p \in M \text{ et } \omega \in \Lambda^k(T_p^*M) \right\}$$

On note $\pi: \Lambda^k T^*M \rightarrow M$ la projection sur la variété de base. À partir de toute carte (U, φ) de M , on peut construire la carte $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ de $\Lambda^k T^*M$, où $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ est définie par

$$\tilde{\varphi}(p, \omega) = (\varphi(p), (\omega_I)_I)$$

où $\omega = \omega_I dx^I|_p$.

Une k -forme différentielle est une section lisse du fibré $\Lambda^k T^*M$. Étant donné leur importance, on note $\Omega^k(M)$ l'ensemble qu'elles forment (au lieu de $\Gamma(\Lambda^k T^*M)$).

2.20 (Pullback d'une forme différentielle). — Il est clair que le pullback d'une forme différentielle reste une forme différentielle, et que $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$ si $\omega \in \Omega^k(N)$ et $\eta \in \Omega^\ell(N)$ (où $F: M \rightarrow N$) est lisse. Cette formule, et celles du paragraphe 2.11 rendent aisée la manipulation des formes différentielles. À titre d'exemple, nous calculons le pullback de la forme $dx \wedge dy$ par l'application $F: \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

On a

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy) &= F^*dx \wedge F^*dy \\ &= d(x \circ F) \wedge d(y \circ F) \\ &= d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) \\ &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr \\ &= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dr \wedge d\theta \\ &= r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

2.3 Dérivée extérieure d'une forme différentielle

2.21. — On rappelle qu'une 0-forme sur une variété M est juste une fonction $f \in C^\infty(M)$. On peut se demander à quelles conditions une 1-forme ω est *exacte*, c'est-à-dire qu'elle découle d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ au sens où $\omega = df$. Comme en coordonnées locales, on aurait

$$\omega_i dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

une condition nécessaire serait que

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \text{ pour tous } i, j \quad (6)$$

dans toutes les cartes de M . Si tel est le cas, on dit que la forme ω est *fermée*. Cette définition fait intervenir les cartes. Le premier résultat que nous donnons montre qu'on peut définir de manière intrinsèque les formes fermées.

2.22 PROPOSITION. — *Soit $\omega \in \Omega^1(M)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (A) ω est fermé ;
 (B) La relation (6) est vérifiée par un ensemble de cartes dont les domaines recouvrent M .
 (C) Pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, on a

$$X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = 0.$$

Démonstration. L'implication (A) $\implies$ (B) est triviale. Supposons (B) et montrons (C). Nous avons déjà vérifié que

$$A: (X, Y) \mapsto X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

est un tenseur au paragraphe 2.10. Cela justifie les calculs locaux que nous allons faire. Comme localement (c'est-à-dire sur une carte $(U, (x^1, \dots, x^n))$ prises parmi celles de l'hypothèse (B)), tout champ vectoriel est une combinaison $C^\infty(U)$ -linéaire de $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, il suffit de vérifier le résultat pour $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, mais alors

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = 0.$$

L'implication (C) $\implies$ (A) se prouve en réutilisant le caractère tensoriel de A (qui permet d'appliquer A à des champs locaux) et en choisissant X et Y comme précédemment, cette fois dans une carte quelconque de M . $\square$

2.23 (Différentielle d'une 1-forme). — Au regard de la proposition précédente, il semble naturel d'appeler $d\omega$ le tenseur

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

et de l'interpréter (au moins temporairement) comme mesurant le défaut de ω à être fermé. D'ores et déjà, nous remarquons que $d \circ d = 0$, ce qui exprime que toute 1-forme exacte est fermée.

Dans le cas général, la construction de la dérivée extérieure est donnée par le résultat suivant.

2.24 THÉORÈME. — Soit M une variété. Il existe une unique famille d'applications $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ (où $k \geq 0$ parcourt les entiers) telle que

- (A) les applications $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ sont linéaires ;
 (B) pour tout $\omega \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^\ell(M)$, on a

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

- (C) pour tout $\omega \in \Omega^k(M)$, on a $d(d\omega) = 0$.

- (D) la dérivée extérieure d'une 0-forme (c'est-à-dire d'une fonction C^∞) est sa différentielle (définie au paragraphe 2.6).

De plus, la dérivée extérieure d'une 1-forme coïncide avec celle définie au paragraphe 2.23. Par ailleurs, la dérivée extérieure commute avec les pullbacks, c'est-à-dire

$$F^*(d\omega) = dF^*\omega$$

pour tout $\omega \in \Omega^k(M)$ et toute application lisse $F: N \rightarrow M$.

Démonstration. On affirme qu'une dérivation extérieure (si elle existe) est locale au sens suivant : si ω, ω' sont deux k -formes telles que $\omega = \omega'$ sur un ouvert U de M , alors $d\omega = d\omega'$ sur U . En effet, en tout point $p \in M$, il existe une fonction lisse f égale à 1 sur un voisinage de p et à support dans U . Comme $f(\omega - \omega') = 0$, on a, par linéarité et par la règle d'antidérivation (B),

$$f(d\omega - d\omega') + df \wedge (\omega - \omega') = 0$$

En évaluant en p , on obtient $(d\omega)_p = (d\omega')_p$, ce qui montre notre premier résultat intermédiaire.

Montrons maintenant l'unicité. Considérons $\omega \in \Omega^k(M)$, un point $p \in M$ et une carte locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$ autour de p . Sur U , la forme ω s'écrit

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (7)$$

Considérons comme précédemment une fonction f égale à 1 sur un voisinage V de p , et à support dans U . Alors, on a

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} d(fx^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(fx^{i_k}) \quad \text{sur } V$$

Mais la différence avec (7) est que, cette fois, le membre de droite est définie sur toute la variété M . Par la localité de d , ainsi que les propriétés (B) et (D), on a

$$d\omega = d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge d(fx^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(fx^{i_k}) \quad \text{sur } V$$

ce qui impose les valeurs prises par $d\omega$ au voisinage de p . Ceci finit la preuve de l'unicité.

Pour montrer l'existence, on considère d'abord le cas où $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour une k -forme

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

on définit

$$d\omega = d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Les points (A) et (D) sont clairement vérifiées. Montrons le point (B). Par multilinéarité, il suffit de considérer le cas $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = f dx^I$ et $\eta = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell} = g dx^J$. On a alors

$$\omega \wedge \eta = fg dx^I \wedge dx^J$$

On a alors

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg) dx^I \wedge dx^J \\ &= (f dg + g df) dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge (g dx^J) + f dg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k f dx^I \wedge dg \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

Enfin, pour le point (C), on a

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I$$

puis en dérivant à nouveau

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I \\ &= \sum_I \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I \\ &= 0 \end{aligned}$$

par le lemme de Schwartz.

Montrons de plus que d commute avec les pullbacks F^* par des applications lisses $F: V \rightarrow U$ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, un résultat dont on aura besoin par la suite. Ce résultat est déjà connu pour la différentielle des fonctions, voir 2.11(D). Comme de plus, F^* respecte le produit extérieur, on a

$$dF^*\omega = d(f \circ F d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_n} \circ F)) = d(f \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_n} \circ F)$$

D'autre part

$$F^* d\omega = F^* (df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}) = d(f \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_n} \circ F)$$

d'où l'égalité.

On repasse à présent au cas général d'une variété M . Si $\omega \in \Omega^k(M)$ et (U, φ) est une carte, on note $\omega|_U \in \Omega^k(U)$ la restriction de ω à U et on définit une $(k+1)$ -forme $d\omega$ telle que, sur U , on a

$$d\omega = \varphi^* d((\varphi^{-1})^* \omega|_U)$$

Pour que l'objet $d\omega$ soit bien défini, il faut vérifier que si (V, ψ) est une autre carte, alors

$$\varphi^* d((\varphi^{-1})^* \omega|_U) = \psi^* d((\psi^{-1})^* \omega|_V) \text{ sur } U \cap V \quad (8)$$

Comme $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un C^∞ -difféomorphisme entre les ouverts $\varphi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ de $\mathbb{R}^n$, par ce que l'on a établi précédemment, l'égalité suivante

$$d((\varphi^{-1})^* \omega|_U) = d((\psi \circ \varphi^{-1})^* (\psi^{-1})^* \omega|_V) = (\psi \circ \varphi^{-1})^* d((\psi^{-1})^* \omega|_V)$$

est valable sur $\varphi(U \cap V)$. En appliquant le pullback φ^* , on obtient donc (8). Et les points (A), (B), (C) et (D), que l'on sait vrais lorsque M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, se transportent assez facilement au cas général.

Montrons que, lorsque $F: N \rightarrow M$ est une application lisse, que $F^* d\omega = dF^*\omega$. Soient $p \in N$ et (V, ψ) une carte locale autour de p et (U, φ) une carte locale autour de $F(p)$, telles que $F(U) \subseteq V$. Alors, sur V , on a

$$F^* d\omega = F^* \varphi^* d((\varphi^{-1})^* \omega|_U)$$

tandis que

$$\begin{aligned} dF^*\omega &= \psi^* d((\psi^{-1})^* (F^*\omega)|_V) \\ &= \psi^* d((\psi^{-1})^* F^* \omega|_U) \\ &= \psi^* d((F \circ \psi^{-1})^* \omega|_U) \\ &= \psi^* d((\varphi \circ F \circ \psi^{-1})^* (\varphi^{-1})^* \omega|_U) \\ &= \psi^* (\varphi \circ F \circ \psi^{-1})^* d((\varphi^{-1})^* \omega|_U) \\ &= F^* \varphi^* d((\varphi^{-1})^* \omega|_U) . \end{aligned}$$

Le dernier point à démontrer (que la dérivée extérieure d'une 1-forme est également celle définie au paragraphe 2.23) est laissé au lecteur. $\square$

2.25 (Dérivées extérieures des formes dans $\mathbb{R}^3$). — On fixe ici un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. On sait que toute 0-forme est une fonction de $C^\infty(U)$. Toute 1-forme s'écrit

$$\omega = f dx + g dy + h dz$$

Elle peut donc s'identifier au champ de vecteurs $(f, g, h): U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Le résultat précédent permet de calculer la dérivée extérieure de ω

$$d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$$

Le premier terme donne

$$df \wedge dx = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dx = -\frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx$$

En calculant de manière analogue les autres termes, on trouve

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Par ailleurs, si cette fois, ω est une 2-forme, elle est également déterminée par trois fonctions $U \rightarrow \mathbb{R}$, et on peut donc l'identifier à un champ de vecteurs

$$\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$

Cette fois on calcule

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Modulo les identifications de $\Omega^k(U)$ avec des espaces de fonctions ou de champs de vecteurs, on reconnaît donc que d est le gradient, le rotationnel ou bien la divergence. Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(U) \\ \parallel & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(U; \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(U; \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \end{array}$$

2.26 (Formes fermées et exactes). — La terminologie introduite pour les 1-formes s'étend à toutes les k -formes. Pour $k \geq 0$, on dit que $\omega \in \Omega^k(M)$ est *fermée* lorsque $d\omega = 0$. Si $k \neq 0$, on dit que ω est *exacte* s'il existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ telle que $\omega = d\eta$. Par convention, on considérera que la seule 0-forme exacte est la fonction nulle.

L'égalité $d \circ d$ exprime que toutes les formes exactes sont fermées.

2.27 (Intégration d'une n -forme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$). — On fixe U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toute n -forme $\omega \in \Omega^n(U)$ s'écrit $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, où f est une fonction C^∞ .

On peut alors définir l'intégrale de ω sur un borélien $B \subseteq U$, dès lors que f est intégrable sur B (pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$), par la formule

$$\int_B \omega = \int_B f$$

l'intégrale de droite étant une intégrale de Lebesgue. Le résultat suivant indique comme cette notion d'intégrale interagit avec les pullbacks par des difféomorphismes.

2.28 PROPOSITION. — Soit $F: U \rightarrow V$ un C^∞ -difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, dont le jacobien a un signe constant $\pm$. Si $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ est une forme sur V et $B \subseteq V$ est un borélien tel que f soit intégrable sur B , alors on peut intégrer $F^*\omega$ sur $F^{-1}(B)$ et

$$\int_{F^{-1}(B)} F^*\omega = \pm \int_B \omega$$

Démonstration. Par définition, et par la formule de changement de variables pour l'intégrale de Lebesgue, on a

$$\int_B \omega = \int_B f = \int_{F^{-1}(B)} f \circ F |JF|$$

où $JF: U \rightarrow \mathbb{R}$ désigne le (déterminant) jacobien de F . Par ailleurs,

$$F^* \omega = f \circ F F^* (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = f \circ F JF dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Ce résultat découle de la définition de F^* et du lemme 2.18. En intégrant $F^* \omega$ sur $F^{-1}(B)$ on trouve le résultat attendu. $\square$

Ainsi, la notion d'intégrale de formes différentielles que nous avons introduite n'est pas invariante par difféomorphisme. Il y a une indétermination sur le signe, due à des problèmes d'orientation. Pour pouvoir transporter cette intégrale sur des variétés quelconques, il va falloir les munir (et introduire les notions adéquates) d'une orientation, ce qui est entrepris dans la sous-section suivante.

2.4 Orientations

2.29 (Cas d'un espace vectoriel de dimension finie). — Soit V un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On dit que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation lorsque l'application linéaire qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$ a un déterminant > 0 . On définit ainsi une relation d'équivalence entre les bases de V , et on se convainc qu'il n'existe que deux classes d'équivalences. Une orientation est le choix d'une de ces deux classes. Les bases appartenant à l'orientation sont dites *positivement orientées*, et les autres *négativement orientées*.

On traite à part le cas $V = \{0\}$ d'un espace de dimension 0, qui a comme unique base la famille vide $\emptyset$. Ici, une orientation de V est le choix d'un signe $+$ ou $-$ (et la base $\emptyset$ sera considérée positivement ou négativement orientée selon le signe choisi).

L'espace $\mathbb{R}^n$ a une orientation canonique, celle qui fait de la base canonique une base positivement orientée.

Si $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ est un n -tenseur alterné non nul (où $n \geq 1$), le lemme 2.18 a comme conséquence que, pour toutes bases $(E_1, \dots, E_n)$ et $(E'_1, \dots, E'_n)$ de V , les réels $\omega(E_1, \dots, E_n)$ et $\omega(E'_1, \dots, E'_n)$ ont même signe si et seulement si $(E_1, \dots, E_n)$ et $(E'_1, \dots, E'_n)$ ont la même orientation. Il suit de cela que tout $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ détermine une orientation, à savoir la classe d'équivalence

$$\{(E_1, \dots, E_n) \text{ base de } V : \omega(E_1, \dots, E_n) > 0\}$$

Réciproquement, deux tenseurs $\omega, \omega' \in \Lambda^n(V^*)$ déterminent la même orientation si et seulement s'ils sont positivement colinéaires.

Lorsque $n = 0$, on rappelle que, par convention $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$. Un élément $\omega \in \Lambda^0(V^*) \setminus \{0\}$ détermine donc lui aussi une orientation (donnée par le signe de ω).

2.30. — On dit qu'un isomorphisme $T: V \rightarrow V$ *préserve* (resp. *renverse*) l'orientation lorsque $\det T > 0$ (resp. $\det T < 0$).

Désignons maintenant par U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et soit $F: U \rightarrow V$ un difféomorphisme. On dit que F *préserve* (resp. *renverse*) l'orientation lorsque le jacobien JF est strictement positif (resp. strictement négatif) en tout point de U .

2.31 (Orientation d'une variété). — Intuitivement, une orientation d'une variété M de dimension n est le choix, en tout point p , d'une orientation de l'espace tangent $T_p M$, qui varie « continument » avec p .

Le cas $n = 0$ doit là aussi être traité à part. Une variété M de dimension 0 consiste en des points isolés, ainsi la définition intuitive plus haut peut être reprise telle quelle : une *orientation* de M est tout simplement une fonction $\varepsilon : M \rightarrow \{-1, 1\}$.

Dans le cas $n \geq 1$, on dit qu'un sous-atlas (de la structure différentielle) est *orienté* lorsque les applications de changement de cartes préservent l'orientation. On appelle *orientation* de M un sous-atlas orienté maximal. Une carte sera dite *orientée* lorsqu'elle appartient à ce sous-atlas. Enfin, une variété *orientée* est une variété munie d'une orientation.

Une fois la variété M munie d'une orientation, chaque espace tangent $T_p M$ hérite d'une orientation. Le cas $n = 0$ est clair, l'orientation de $T_p M$ est le signe de $\varepsilon(p)$. Dans le cas où la dimension n de M est non nulle, on procède de la manière suivante : on choisit une carte orientée $(U, (x^1, \dots, x^n))$ autour de p , et on donne à $T_p M$ l'orientation qui fait de la base

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$$

une base positivement orientée. Cette orientation ne dépend pas du choix de la carte orientée.

On dit qu'un difféomorphisme $F : M \rightarrow N$ entre deux variétés orientées *préserve l'orientation* lorsque l'application tangente $TF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ préserve l'orientation (ou de manière équivalente, si l'application F , lue dans des cartes orientées de M et N , préserve l'orientation). À titre d'exemple, si (U, φ) est une carte orientée de M , alors $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ préserve l'orientation.

2.32 THÉORÈME. — *Soit M une variété orientée de dimension n et $B \subseteq M$ un borélien. Il existe une unique forme linéaire*

$$\int_B : \{\omega \in \Omega^n(M) : \text{supp}(\mathbb{1}_B \omega) \text{ est compact}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour toute carte orientée (U, φ) et pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$ telle que $\text{supp}(\mathbb{1}_B \omega) \subseteq U$, on a

$$\int_B \omega = \int_{\varphi(U \cap B)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

Démonstration. On montre d'abord l'unicité. On va pour cela établir que la valeur de $\int_B \omega$ est imposée.

Tout d'abord, il est clair que si $\omega = 0$ sur B (c'est-à-dire $\mathbb{1}_B \omega = 0$), alors $\int_B \omega = 0$. Soit $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ un atlas orienté de M . On appelle $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Alors

$$\mathbb{1}_B \omega = \sum_{\alpha \in A} \mathbb{1}_B \psi_\alpha \omega$$

et en réalité, la somme de droite ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls (exercice). Notons $A' = \{\alpha \in A : \mathbb{1}_B \psi_\alpha \omega \neq 0\}$ les indices correspondants. On décompose donc ω en

$$\omega = \sum_{\alpha \in A'} \psi_\alpha \omega + \omega'$$

où ω' est nulle sur B . On doit donc avoir

$$\begin{aligned} \int_B \omega &= \sum_{\alpha \in A'} \int_B \psi_\alpha \omega \\ &= \sum_{\alpha \in A'} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap B)} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\psi_\alpha \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in A'} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap B)} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\psi_\alpha \omega) \end{aligned}$$

ce qui impose l'unicité.

Passons à l'existence. On pose, pour tout ω tel que $\text{supp}(\mathbb{1}_B \omega)$ soit compact,

$$\int_B \omega = \sum_{\alpha \in A} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap B)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\psi_\alpha \omega) \quad (9)$$

La somme à droite est bien finie, par ce qui précède. Supposons maintenant que $\text{supp}(\mathbb{1}_B \omega) \subseteq U$ où (U, φ) est une carte orientée. Alors, en utilisant que les applications de changement de cartes $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ préservent l'orientation, ainsi que la proposition 2.28,

$$\begin{aligned} \int_B \omega &= \sum_{\alpha \in A} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap B)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\psi_\alpha \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in A} \int_{\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha \cap B)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\psi_\alpha \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in A} \int_{\varphi(U \cap U_\alpha \cap B)} (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})^*(\varphi_\alpha^{-1})^*(\psi_\alpha \omega) \\ &= \sum_{\alpha \in A} \int_{\varphi(U \cap U_\alpha \cap B)} (\varphi^{-1})^*(\psi_\alpha \omega) \\ &= \int_{\varphi(U \cap B)} (\varphi^{-1})^* \omega \end{aligned} \quad \square$$

2.5 Formule de Stokes

2.33 (Domaine régulier). — Soit M une variété de dimension $n \geq 1$. Un *domaine régulier* est un sous-ensemble S de M tel que pour tout point $p \in M$, il existe une carte locale (U, φ) autour de p pour laquelle

$$\varphi(S \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}) \quad (10)$$

Nous appellerons une carte (U, φ) vérifiant (10) *applatissante* pour S (cette terminologie n'est pas standard).

(A) S est fermé.

En effet, le complémentaire $M \setminus S$ s'écrit

$$M \setminus S = \bigcup_{(U, \varphi)} \varphi^{-1}(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{n-1})$$

où l'union porte sur les cartes applatissantes pour S .

(B) La frontière ∂S est une sous-variété régulière de dimension $n - 1$.

Pour cela, nous allons construire un atlas de ∂S . Remarquons tout d'abord qu'un point p est dans ∂S si et seulement si, dans toute carte (U, φ) autour de p applatissante pour S , on a $\varphi(p) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Notons $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la projection sur les $n - 1$ dernières coordonnées. À partir d'une carte (U, φ) applatissante pour S , on construit la carte $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ de ∂S , où $\tilde{U} = \partial S \cap U$ et $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \pi(\varphi(U))$ est la fonction $\pi \circ \varphi$. Une application du lemme 1.20 permet de conclure que ∂S est bien une variété différentielle, pour la topologie de ∂S induite par celle de M . Une lecture dans les cartes permet de se convaincre que l'application d'inclusion $\partial S \rightarrow M$ est bien un plongement.

2.34 (Orientation du bord d'un domaine régulier). — Si M est une variété orientée de dimension $n \geq 1$ et S un domaine régulier de M , alors l'orientation de M induit une orientation sur la sous-variété ∂S .

On commence par traiter le cas $n \geq 2$. On remarque, qu'au voisinage de chaque point $p \in \partial S$, on peut toujours trouver une carte (U, φ) autour de p qui soit à la fois orientée et qui applatisse S , c'est-à-dire $\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1})$.

En effet, on considère pour cela une carte (U, φ) telle que dans la définition de S . Si elle est orientée, on la conserve. Sinon, on la modifie en composant φ à droite avec l'application

$$(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \mapsto (x^1, -x^2, x^3, \dots, x^n)$$

qui renverse l'orientation et stabilise $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Il est donc possible de constituer un atlas orienté de M composé de cartes applatissantes (U, φ) pour S . Les cartes $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ associées forment alors un atlas orienté de ∂S .

Ainsi, si (U, φ) est une carte orientée applatissante autour de $p \in \partial S$, les bases suivantes

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p \in T_p M, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p \in T_p \partial S$$

sont positivement orientées pour $T_p M$ et $T_p \partial S \subseteq T_p M$. Remarquez que le vecteur $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p$ est « sortant », ce qui fait que ∂S est orienté par la direction sortante. À titre d'exemple, si S est un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ orienté canoniquement, alors ∂S est orienté dans le sens trigonométrique.

Enfin, on montre comment orienter ∂S dans le cas où M est de dimension $n = 1$. Si (U, φ) est une carte applatissante autour de $p \in \partial S$, on pose $\varepsilon(p) = 1$ si (U, φ) est orientée, et $\varepsilon(p) = -1$ dans le cas contraire. La valeur de $\varepsilon(p)$ ne dépend pas du choix de la carte (U, φ) . La fonction $\varepsilon: \partial S \rightarrow \{-1, 1\}$ est l'orientation de ∂S .

2.35 THÉORÈME (Formule de Stokes). — *Soit M une variété orientée et $S \subseteq M$ un domaine régulier. Pour tout $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ tel que $\text{supp}(\mathbb{1}_S \omega)$ soit compact, on a*

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

Le membre de droite est un abus de notation, courant, car ω n'est pas une forme sur ∂S , mais sur M . Il faut le comprendre comme $\int_{\partial S} \iota^* \omega$, où $\iota: \partial S \rightarrow M$ est l'application d'inclusion.

Démonstration. On vérifie tout d'abord que $\text{supp}(\mathbb{1}_S d\omega)$ est inclus dans $\text{supp}(\mathbb{1}_S \omega)$, ce qui garantit sa compacité. Pour cela, il suffit de remarquer que si (U, φ) est une carte locale applatissante telle que $\mathbb{1}_S \omega = 0$ sur U , alors $\mathbb{1}_S d\omega = 0$ sur U .

On commence par le cas où $S = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}$ et $M = \mathbb{R}^n$. Nous allons démontrer la formule dans le cas $n \geq 2$, en laissant au lecteur le soin d'adapter la preuve dans le cas $n = 1$. La forme ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

de sorte que

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

On a donc

$$\int_S d\omega = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \lambda^{(n)}(dx^1, \dots, dx^n)$$

Le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \lambda^{(n)}(dx^1, \dots, dx^n) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 f_1(x^1, \dots, x^n) dx^1 \right) dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n \end{aligned}$$

De même, lorsque $i \geq 2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \lambda^{(n)}(dx^1, \dots, dx^n) = 0$$

Cela montre que

$$\int_S d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \cdots dx^n$$

Enfin, si l'on définit la fonction $\varphi: \partial S \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi(0, x^2, \dots, x^n) = (x^2, \dots, x^n)$$

alors $(\partial S, \varphi)$ est une carte globale orientée de ∂S . Par conséquent,

$$\int_{\partial S} \iota^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\varphi^{-1})^* \iota^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\iota \circ \varphi^{-1})^* \omega$$

En notant $x^2, \dots, x^n$ les coordonnées de $\mathbb{R}^{n-1}$, on a

$$(\iota \circ \varphi^{-1})^* \omega = f(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Ceci montre la formule de Stokes dans le cas présent.

On traite maintenant le cas général (toujours pour $n \geq 2$). On note $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in A\}$ un atlas de cartes orientées applatissantes pour S . Soit $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Pour tout α , on a, par ce qui précède

$$\begin{aligned} \int_S d(\psi_\alpha \omega) &= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap S)} (\varphi_\alpha^{-1})^* d(\psi_\alpha \omega) \\ &= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}} d((\varphi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha \omega) \\ &= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} (\varphi_\alpha^{-1})^* \psi_\alpha \omega \\ &= \int_{\partial S} \psi_\alpha \omega \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur α et à appliquer (9). □

Références

- [1] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.